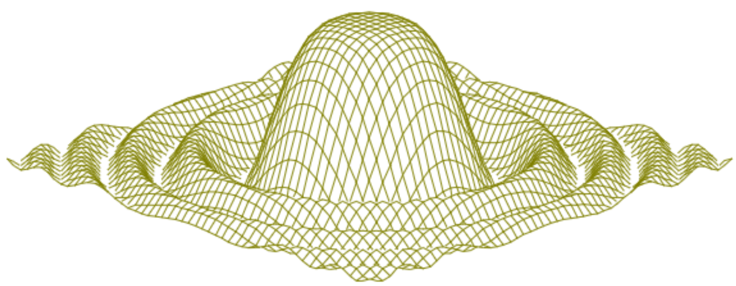
BỘ SÁCH TOÁN HỌC CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

Đinh Thế Lục
Phạm Huy Điển
Tạ Duy Phượng

GIẢI TÍCH CÁC HÀM NHIỀU BIẾN

Những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Giải tích các hàm nhiều biến

*Những nguyên lý cơ bản
và tính toán thực hành*

ĐINH THẾ LỤC
PHẠM HUY ĐIỂN
TẠ DUY PHƯỢNG

BỘ SÁCH TOÁN HỌC CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

Lời nói đầu

Cuốn sách này có thể xem là tập tiếp theo của giáo trình giải tích các hàm số một biến, đã được Nhà xuất bản Giáo dục ấn hành năm 1998, với tựa đề "Giải tích Toán học: Những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành". Trong giáo trình đó chúng ta đã khảo sát dãy số, chuỗi số, hàm số và các phép tính vi tích phân trong không gian một chiều (trục số thực). Trong tập tiếp theo này các đối tượng trên sẽ được khảo sát trong không gian nhiều chiều, và đó chính là sự khác biệt cơ bản giữa hai giáo trình. Để xây dựng các phép tính vi tích phân trong không gian nhiều chiều, trước hết phải hiểu rõ cấu trúc của những không gian này. Chương 1 đề cập tới hai cấu trúc quan trọng nhất của không gian nhiều chiều, cấu trúc tuyến tính và cấu trúc khoảng cách, thông qua một ví dụ điển hình là không gian $\mathbb{R}^n$. *Để giáo trình mang tính độc lập nhất định, không gian này được xây dựng trực tiếp, mà không dựa vào khái niệm không gian tuyến tính tổng quát trong giáo trình Đại số tuyến tính. Để tránh cồng kềnh, các khái niệm và kết quả của chương này được chọn lọc tới mức tối thiểu từ 3 môn Đại số tuyến tính, Tôpô và Giải tích hàm, vừa đủ sử dụng cho những chương sau, đồng thời dẫn dắt người học làm quen với những bộ môn quan trọng đó. Các chương từ 2 đến 7 không chỉ thiết lập trong không gian nhiều chiều những gì đã biết trong Giải tích một biến mà còn đưa ra những khái niệm mới chỉ xuất hiện trong không gian nhiều chiều. Chương 8 trình bày các kiến thức cơ bản về chuỗi Fourier và phép biến đổi tích phân Fourier. Chương cuối cùng giới thiệu sơ lược về hệ phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng. Hai chương sau này nhằm mục đích củng cố những kiến thức về vi tích phân đã học trong những chương trước, rèn luyện kỹ năng tính toán thực hành và trang bị kiến thức để học viên tìm hiểu các môn học khác như Vật lý, Cơ học, Sinh học,...*

Nếu như các khái niệm, kết quả chứng minh trong Giải tích một biến có tính trực quan cao, dễ hiển thị, thì sang không gian nhiều chiều tính trừu tượng đã tăng lên rõ rệt. Tuy nhiên, cái đẹp của Toán học nằm trong sự trừu tượng và cái ích của Toán học nằm trong sự cụ thể. Để hiểu rõ hai mặt ấy của Toán học đồng thời nhằm rèn luyện phương pháp suy luận toán học cho sinh viên, trong giáo trình này hai cách tiếp cận thường được sử dụng đan xen nhau: đó là cách đi từ cụ thể tới trừu tượng và ngược lại, từ trừu tượng tới cụ thể tuỳ theo từng khái niệm, từng định lý. Mỗi khi các kết quả được phát biểu và chứng minh trong không gian tổng quát n chiều, thì người đọc có thể hạn chế trong trường hợp n=2 hoặc n=3 để hiểu dễ dàng và thấu đáo hơn. Trong tài liệu này, chúng tôi cố gắng đưa vào các chứng minh đầy đủ của những định lý lớn và "hóc búa" thường bị né tránh trong các giáo trình hiện hành. Những chứng minh này là khó nhưng chứa đựng các phương pháp suy luận điển hình rất cần cho việc rèn luyện tư duy (nhất là đối với học sinh cao học và những ai muốn đi sâu hơn vào lĩnh vực Giải tích Toán học). Người đọc *không cần nhớ chi tiết, mà chỉ cần hiểu được các chứng minh này đã được xem là đạt yêu cầu.*

Việc minh hoạ và tính toán trong không gian nhiều chiều vốn là một vấn đề khó vì không mấy khi có thể thực hiện được bằng thủ công, nhất là về các chủ đề: Vẽ đồ thị trong không gian, tính tích phân bội, tính vi phân hàm ẩn vectơ nhiều biến, tính toán các biến đổi tích phân Fourier, giải phương trình đạo hàm riêng,... Cái khó ở đây bắt đầu ngay từ việc tìm sao cho ra một ví dụ có thể xử lý được. Chính vì vậy, lĩnh vực này luôn luôn là mơ hồ đối với hầu hết mọi học viên (từ đại học đến cao học). Nhằm xoá bỏ tình trạng này, chúng tôi mạnh dạn đưa vào giáo trình phần hướng dẫn tính toán thực hành trên máy, ngay sau mỗi chương lý thuyết. Qua đây người đọc sẽ thấy rằng ngày nay, với máy tính và phần mềm toán học thông dụng (có sẵn trên thị trường và trên Internet), chỉ bằng những dòng lệnh đơn giản tương tự như ngôn ngữ toán học thông thường, người ta có thể "sờ thấy được" những gì mà trước đây không thể nào hình dung ra nổi. Nếu chưa có sẵn các chương trình tính toán trên máy cá nhân, người đọc có thể truy cập tới một số trung tâm cung cấp dịch vụ tính toán qua mạng (thường là miễn phí) để có thể thực hành tính toán được ngay (bạn đọc có nhu cầu xin liên hệ với các tác giả để biết thêm thông tin chi tiết). Đối với người học chưa có điều kiện tiếp xúc với máy tính, việc đọc phần này vẫn rất có tác dụng, vì sẽ biết được cơ chế giao tiếp giữa người với máy và biết được những gì máy tính có thể thay thế con người trong quá trình tính toán. Quan trọng hơn, qua các ví dụ minh hoạ về tính toán trên máy trình bày trong sách, người học sẽ nắm được kiến thức toán học một cách sâu sắc hơn, do tiếp cận được tới những điều mà trước đây tưởng như là không thể. Khi không còn bị mặc cảm bởi những bài toán hóc búa, người ta sẽ thấy toán học không còn là huyền bí và tự tin trong việc đón nhận những bài toán khó nảy sinh từ thực tiễn sản xuất.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách này sẽ là một cẩm nang tốt cho những ai muốn hiểu sâu sắc về Giải tích toán học nói chung, và về giải tích các hàm số nhiều biến nói riêng. Do đó, nó sẽ là hữu ích đối với các học sinh cao học, cũng như thầy và trò các trường Tổng hợp, Sư phạm, Kỹ thuật,...

Tập thể tác giả xin chân thành cảm ơn giáo sư Nguyễn Duy Tiến (ĐHQG Hà Nội) và giáo sư Đoàn Quỳnh (ĐHSP Hà Nội) đã đọc rất kỹ bản thảo và đã cho những nhận xét quý báu. Việc trình bầy một chủ đề phức tạp sẽ không thể tránh khỏi những sai sót, cho nên chúng tôi mong tiếp tục nhận được sự phê bình, góp ý của các đồng nghiệp và học viên gửi về theo địa chỉ: Viện Toán học, Trung tâm Khoa học Tự nhiên và Công nghệ Quốc gia, 18-Đường Hoàng Quốc Việt, Quận Cầu Giấy, Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

Chương 1

Không gian $\mathbb{R}^n$ & Không gian metric

1.1. Không gian $\mathbb{R}^n$

Trong giáo trình này chúng ta sẽ làm việc trên không gian $\mathbb{R}^n$ - một ví dụ rất đặc biệt của không gian *n-chiều*. Để giáo trình có được tính độc lập nhất định, chúng tôi sẽ trình bày lại một cách ngắn gọn việc xây dựng không gian $\mathbb{R}^n$. Độc giả nào quan tâm đến lý thuyết không gian *n-chiều* nói chung xin xem trong các giáo trình Đại số tuyến tính. Độc giả nào đã học qua giáo trình Đại số tuyến tính có thể bỏ qua phần này.

1.1.1. Điểm trong không gian *n*-chiều

Ta đã quen thuộc với cách dùng *một số* để biểu diễn *một điểm trên đường thẳng* (khi trên đường thẳng đó cho sẵn đơn vị dài). Ta cũng đã biết việc dùng một *cặp 2 số (x,y)* để biểu diễn *một điểm trong mặt phẳng* có hệ tọa độ Descartes. Tương tự như vậy, người ta sử dụng một *bộ 3 số (x,y,z)* để biểu diễn một điểm trong không gian.

Đường thẳng còn được gọi là không gian *1-chiều*, mặt phẳng còn được gọi là không gian *2-chiều*, và không gian vật lý xung quanh ta còn được gọi là không gian *3-chiều*. Như vậy, một số biểu diễn một điểm trong không gian 1-chiều, một cặp 2 số biểu diễn điểm trong không gian 2-chiều, và một bộ 3 số biểu diễn một điểm trong không gian 3-chiều. Tuy rằng, ta không thể cho được minh họa hình học của cách biểu diễn điểm trong không gian có số chiều lớn hơn 3, nhưng bằng cách khái quát hóa, người ta có thể dùng một bộ *n số* để biểu diễn một điểm trong không gian *n-chiều*. Không gian *n-chiều* với $n \geq 4$ không phải chỉ là sự tưởng tượng và khái quát hóa của các nhà toán học, mà chúng thật sự tồn tại trong vật lý, kinh tế, xã hội... Thí dụ để biểu diễn nhiệt độ tại một điểm trong không gian xung quanh ta thì ngoài 3-chiều thông thường ta phải thêm một chiều thời gian. Hoặc để biểu diễn tình trạng sức khỏe của một người nào đó ta phải dùng bộ nhiều số: chiều cao, trọng lượng, vòng ngực, huyết áp, độ thính, tầm nhìn... Chính xác hơn, với số *tự nhiên n* cho trước, ta có:

ĐỊNH NGHĨA. *Một điểm trong không gian n-chiều là một bộ n số có thứ tự*

$$(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Người ta thường ký hiệu một điểm trong không gian *n-chiều* bằng một chữ đậm, thí dụ như $\boldsymbol{x}$, và viết $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Số x_i trong bộ số này được gọi là *tọa độ* thứ i của điểm $\boldsymbol{x}$.

Giả sử có 2 điểm trong cùng một không gian *n-chiều* là

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \quad \text{và} \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n),$$

ta định nghĩa tổng của chúng ($\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$) là một điểm trong không gian *n-chiều* với các *tọa độ* là

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

và ta định nghĩa tích của điểm $\boldsymbol{a}$ với một *số* λ là một điểm với các *tọa độ* là

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

Thí dụ. Trong không gian *3-chiều*, với $\boldsymbol{a} = (1,3,5)$, $\boldsymbol{b} = (2,0,1)$, $\lambda = 7$, ta có

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (3,3,6) \quad \text{và} \quad \lambda\boldsymbol{a} = (7,21,35).$$

Người ta ký hiệu $\boldsymbol{0}$ là điểm (trong không gian *n-chiều*) có tất cả các tọa độ bằng 0 (tức là $\boldsymbol{0} = (0,0,...,0)$) và gọi nó là *điểm gốc*, còn $-\boldsymbol{a}$ là điểm $(-1)\boldsymbol{a}$ (tức là điểm có các tọa độ ngược dấu với các tọa độ điểm $\boldsymbol{a}$). Khi ấy dễ dàng kiểm tra rằng các phép tính trên thỏa mãn các luật sau:

(1) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$;

(2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$;

(4) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ và $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$, với mọi số λ, μ;

(5) $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ với mọi $\boldsymbol{a}$;

(6) $1.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Từ đây người ta cũng quy ước viết $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ thay cho $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

Chứng minh các đẳng thức trên là dễ dàng, người đọc có thể tự làm như các bài tập. Để làm thí dụ, chúng ta chứng minh đẳng thức (3).

Theo định nghĩa $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$, nên

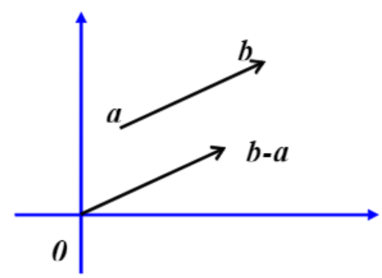
$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\lambda(a_1 + b_1), ..., \lambda(a_n + b_n)) = (\lambda a_1 + \lambda b_1, ..., \lambda a_n + \lambda b_n) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} .$$

1.1.2. Vectơ trong không gian *n*-chiều

Người ta gọi mỗi cặp điểm $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *trong không gian n-chiều là một vectơ buộc* (hay *vectơ định vị) trong không gian n-chiều.*

Vectơ xác định bởi cặp điểm $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ được ký hiệu là $\overline{\boldsymbol{ab}}$. Người ta gọi $\boldsymbol{a}$ là *điểm đầu*, $\boldsymbol{b}$ là *điểm cuối*, và còn gọi $\overline{\boldsymbol{ab}}$ là vectơ *định vị tại* $\boldsymbol{a}$.

Hai vectơ $\overline{\boldsymbol{ab}}$ và $\overline{\boldsymbol{cd}}$ được gọi là *tương đẳng* nếu chúng thỏa mãn điều kiện $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}$.



Hình 1.1

Theo định nghĩa đó, vectơ $\overline{\boldsymbol{ab}}$ là tương đẳng với vectơ *định vị tại gốc* $\boldsymbol{0}$ và có điểm cuối là $\boldsymbol{b}$-$\boldsymbol{a}$. Rõ ràng, chỉ có duy nhất một vectơ *định vị tại gốc* tương đẳng với một vectơ cho trước (vì dễ thấy rằng nếu 2 vectơ tương đẳng mà cùng định vị tại gốc thì điểm cuối của chúng cũng trùng nhau). Điều này được minh họa trong trường hợp *2-chiều* như hình vẽ bên.

Vectơ *định vị tại gốc* được xác định hoàn toàn bởi điểm cuối của nó, cho nên trong không gian *n-chiều* ta có mối tương quan 1-1 giữa *điểm* và *vectơ định vị tại gốc*. Như vậy một bộ n số có thể được xem là tọa độ của một điểm $\boldsymbol{a}$ hay của một vectơ định vị tại gốc $\overline{\boldsymbol{0a}}$, và để cho thuận tiện người ta viết vectơ này một cách đơn giản là $\overline{\boldsymbol{a}}$ hay thậm chí là $\boldsymbol{a}$, trong trường hợp không sợ xảy ra nhầm lẫn.

Hai vectơ $\overline{\boldsymbol{ab}}$ và $\overline{\boldsymbol{cd}}$ được gọi là *song song* nếu tồn tại số $\lambda \neq 0$ sao cho $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c})$. Khi số λ là dương thì ta nói rằng chúng *cùng hướng* (hay *cùng chiều*), và trong trường hợp ngược lại ta nói rằng chúng *ngược hướng* (hay *ngược chiều*) *nhau*.

Như vậy, hai vectơ là *song song* với nhau khi và chỉ khi các vectơ định vị tại gốc tương đăng với chúng *sai khác nhau một hệ số* (khác 0). Nghĩa là, khái niệm song song ở đây hoàn toàn phù hợp với những gì biết trong trường hợp không gian *2-chiều* hoặc *3-chiều* (trong giáo trình Hình học giải tích).

1.1.3. Tích vô hướng

ĐỊNH NGHĨA. *Tích vô hướng của 2 vectơ* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *là một số (ký hiệu là* $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$ *) xác định như sau:*

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n .$$

(Trong một số giáo trình, để phân biệt *tích vô hướng* của 2 vectơ với *tích thông thường* của 2 số, người ta còn ký hiệu tích vô hướng của 2 vectơ $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ là $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ hay $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$. Tuy nhiên, trong giáo trình này, khi cần phân định rõ sự khác biệt giữa các vectơ với các số thông thường, chúng ta sẽ dùng phông chữ đậm để biểu diễn vectơ, cho nên sẽ không xảy ra sự lẫn lộn giữa 2 khái niệm đã nói. Vì vậy, chúng ta sẽ sử dụng cách ký hiệu đơn giản như đã trình bày trên, như rất nhiều tài liệu nước ngoài hiện nay, và sẽ chỉ sử dụng ký hiệu <.,.> khi nào thấy cần thiết).

TÍNH CHẤT. *Từ định nghĩa trên ta thấy tích vô hướng của 2 vectơ có những tính chất sau:*

1) $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}$;
2) $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).\boldsymbol{a}$;
3) $(\alpha.\boldsymbol{a}).\boldsymbol{b} = \alpha.(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})$, *với mọi số* α ;
4) $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} \geq 0$, và $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} = 0$ *khi và chỉ khi* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Chứng minh. Việc kiểm tra các Tính chất 1 và 3 là dễ dàng và dành lại cho người đọc. Ta kiểm tra các tính chất còn lại. Đăng thức đầu trong Tính chất 2 suy ra từ nhận xét sau

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + ... + a_n(b_n + c_n) = \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

và đăng thức sau suy ra từ Tính chất 1.

Phần xuôi của Tính chất 4 có ngay từ định nghĩa, còn phần ngược lại thì rút ra từ nhận xét rằng nếu trong bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ có một phần tử nào đó khác 0, thí dụ là a_i , thì

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq a_i^2 > 0 .$$

Các tính chất đã được kiểm tra xong.

Để cho thuận tiện người ta hay viết $\boldsymbol{a}^2$ thay cho $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}$. Lưu ý rằng đây chỉ là quy ước mang tính hình thức và không có liên quan gì đến phép lũy thừa (hoàn toàn vô nghĩa khi viết $\boldsymbol{a}^3$). Tuy nhiên người đọc có thể dễ dàng kiểm tra các "hằng đẳng thức" tương tự sau đây:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2 \ ,$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2 \ .$$

Hai vectơ $\boldsymbol{a}$ *và* $\boldsymbol{b}$ *được gọi là vuông góc với nhau nếu* $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 0$.

Trong trường hợp không gian *2-chiều* và *3-chiều* khái niệm *vuông góc* ở đây hoàn toàn trùng hợp với khái niệm vuông góc thông thường.

1.1.4. Chuẩn của vectơ

Bổ đề sau đây có tên là *bất đẳng thức Schwarz* và sẽ đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết vectơ.

Bổ đề (Schwarz). *Với 2 vectơ* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *ta luôn có*

$$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})^2 \le (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}).(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{b}).$$

Chứng minh. Với $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên. Khi $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ từ Tính chất 4 ta có $(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \ge 0$, với mọi số t. Suy ra

$$\boldsymbol{a}^2 t^2 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}t + \boldsymbol{b}^2 \ge 0 \ , \quad \text{với mọi } t \ .$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc 2 (biến t) ta có:

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \le 0 \ .$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

Định nghĩa. *Chuẩn (hay độ dài) của vectơ* $\boldsymbol{a}$, *ký hiệu là* $\|\boldsymbol{a}\|$, *là một số xác định như sau:*

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}} \ .$$

Dưới dạng *tọa độ* thì công thức trên có nghĩa là

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \ ,$$

và trong trường hợp không gian *2-chiều* hoặc *3-chiều* thì nó hoàn toàn trùng hợp với công thức tính độ dài theo định lý Pythagoras.

Rõ ràng vectơ có chuẩn bằng 0 khi và chỉ khi tất cả các tọa độ của nó bằng 0.

Từ bổ đề Schwarz, sau khi lấy căn 2 vế, ta thu được công thức rất hay được sử dụng sau này là

$$|(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})| \le \|\boldsymbol{a}\|.\|\boldsymbol{b}\| \ .$$